

VANTAGENS DA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE MONTE CARLO NA AVALIAÇÃO DAS INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

João Alves e Sousa¹ e Álvaro Silva Ribeiro²

¹Laboratório Regional de Engenharia Civil da Madeira, Funchal, Portugal

²Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal

1. INTRODUÇÃO

A validação de implementações do GUM constitui uma matéria que, na actualidade, é uma preocupação dos laboratórios de calibração e ensaio, visto a sua actividade requerer a utilização de modelos matemáticos cuja natureza os classifica no conjunto de problemas onde a aplicação do GUM traduz uma aproximação.

Das técnicas que se admite possuírem esta capacidade, o método de Monte Carlo (MCM), em particular, tem sido usado com essa finalidade em alguns Institutos Nacionais de Medição [2] e para o tipo de problemas que em que essas organizações estão envolvidas, notando-se que a sua aplicação noutros laboratórios tem sido limitada. Em particular, as incertezas associadas com as medições nestes laboratórios é de uma ordem de grandeza superior à dos Institutos Nacionais, um facto que pode trazer problemas diferentes em termos de aplicação das ferramentas, especialmente quando aplicadas a modelos não-lineares.

Uma vantagem importante do MCM é que produz uma aproximação da função de distribuição para a variável de saída (mensuranda). Desta distribuição quaisquer parâmetros estatísticos, incluindo o resultado da medição, a incerteza de medição padrão associada e o respectivo intervalo de confiança, podem ser obtidos. Outra vantagem a realçar reside na sua aplicabilidade não depender da natureza do modelo (e.g., pode ser fortemente não-linear ou ter um número arbitrário de variáveis ou ambas), e na sua capacidade de trabalhar com modelos de multi-estágio (e.g., em calibração, quando envolve o uso de curvas de calibração determinadas em estágios anteriores). As desvantagens residem no

carácter numérico que esta técnica impõe, particularmente a sua natureza computacional intensiva. É também necessária uma avaliação cuidadosa da qualidade dos geradores de números pseudo-aleatórios utilizados e das suas qualidades de repetibilidade, reprodutibilidade e portabilidade, entre outras.

Neste estudo vamos evidenciar a utilidade do MCM em aplicações relativamente simples, mas suficientemente ilustrativas das potencialidades do método como ferramenta de validação do GUM. Estes exemplos servirão igualmente para ilustrar alguns dos problemas que a utilização mecanística do GUM pode acarretar. É de realçar, no entanto, a importância passada e actual do GUM como um documento fundamental nesta área, que fornece uma análise detalhada da teoria subjacente ao cálculo das incertezas de medição e que promove e possibilita, em muitos casos, uma avaliação consistente e transferível das incertezas de medição, o que é fundamental para a rastreabilidade das medições. O problema, como se disse, reside na utilização que é dada a este documento.

2. COMBINAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES RECTANGULARES

O primeiro conjunto de exemplos, consiste na aplicação de um modelo aditivo contendo duas (do tipo $Y=X_1+X_2$) ou três (do tipo $Y=X_1+X_2+X_3$) variáveis com amplitudes diversas, possuindo cada uma delas uma distribuição de probabilidade rectangular, efectuando-se uma comparação dos resultados obtidos utilizando o GUM e o MCM. Em todas as simulações MCM foram realizadas 500 000 simulações.

1.1 Duas distribuições retangulares iguais

No primeiro caso, considera-se que as duas distribuições retangulares do modelo matemático relativas às variáveis X_1 e X_2 têm igual amplitude – intervalo $[0; 1]$. A convolução das duas distribuições recorrendo ao MCM origina uma distribuição de probabilidade de saída triangular com a configuração exposta na Figura 1.

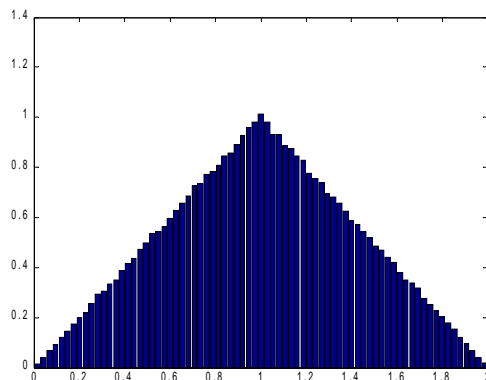


Figura 1: Soma de 2 distribuições retangulares iguais de intervalo $[0,1]$.

Este tipo de modelo admite, igualmente, a aplicação da Lei de Propagação de Incertezas do GUM, permitindo a comparação dos resultados obtidos com aqueles que resultam da aplicação do MCM, tal como se ilustra na Tabela 1.

Tabela 1: Valores comparativos entre o GUM e o MCM para a soma de 2 distribuições retangulares de igual amplitude

Método	Média	$U_{95\%}$	$U_{99\%}$
GUM	1.0000	1.6004	2.1066
MCM	0.9994	1.5543	1.8002

É visível que o GUM sobrestima o intervalo de confiança a ambos os níveis de confiança mas particularmente nos 99 % de confiança. Mais grave é o facto de este último intervalo conter valores negativos, o que é difícil de interpretar em termos físicos. As diferenças percentuais entre os dois métodos são de 3 % e de 15 % respectivamente.

1.2 Duas distribuições retangulares com amplitudes diferentes

No segundo caso, considera-se que as duas distribuições retangulares do modelo matemático relativas às variáveis X_1 e X_2 têm

amplitudes distintas (X_1 com um intervalo $[0, 1]$ e X_2 com um intervalo $[0; 2,5]$). A convolução das duas distribuições recorrendo ao MCM origina uma distribuição de probabilidade de saída trapezoidal com a configuração exposta na Figura seguinte.

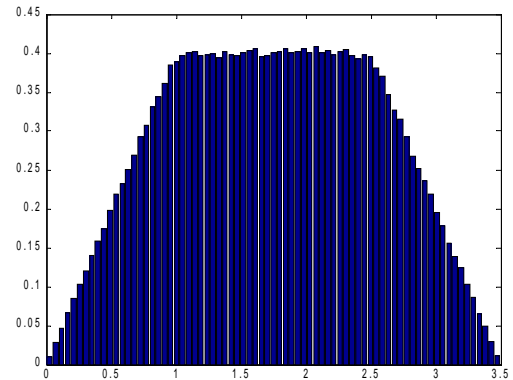


Figura 2: Soma de 2 distribuições retangulares com diferentes semi-amplitudes.

A aplicação da LPI a este modelo permite, novamente, a comparação dos resultados obtidos com aqueles que resultam da aplicação do MCM.

Tabela 2: Valores comparativos entre o GUM e o MCM para a soma de 2 distribuições retangulares distintas

Método	Média	$U_{95\%}$	$U_{99\%}$
GUM	1.7500	3.0470	4.0108
MCM	1.7507	2.7941	3.1858

Neste segundo caso, o padrão detectado antes mantém-se mas as diferenças são mais acentuadas, agora com diferenças de 8 % e de 21 % entre o GUM e o MCM para níveis de confiança de 95 % e 99 %, respectivamente.

1.3 Três distribuições retangulares com amplitudes diferentes

No terceiro caso, consideram-se três distribuições retangulares relativas às variáveis X_1 , X_2 e X_3 do modelo matemático, todas com amplitudes distintas (X_1 com um intervalo $[0; 1]$, X_2 com um intervalo $[0; 2,5]$ e X_3 com um intervalo $[0; 1]$). A convolução destas distribuições recorrendo ao MCM origina uma distribuição de probabilidade de saída que se

aproxima da distribuição normal, com a configuração exposta na Figura abaixo.

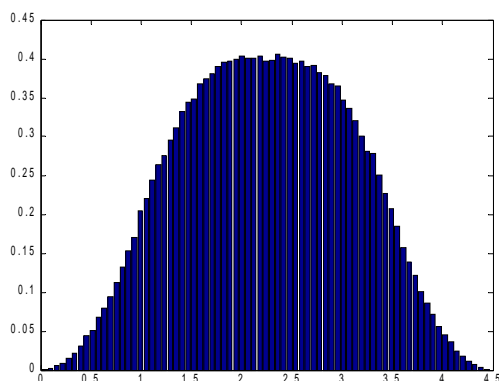


Figura 3: Soma de 3 distribuições rectangulares com diferentes semi-amplitudes.

Nesta situação, em que já é visível uma aproximação à forma gaussiana as diferenças esbatem-se e o GUM deixa de calcular valores negativos para o intervalo de confiança de 99 % (factor $k=2,58$), o que indica que, em particular para o caso de 95 %, a partir da soma de quatro ou cinco distribuições rectangulares o método convencional já poderá ser considerado, sendo que a sua aplicação e o respectivo erro de aproximação deverão ser validados com uma ferramenta como o GUM.

Tabela 3: Valores comparativos entre o GUM e o MCM para a soma de 3 distribuições rectangulares distintas

Método	Média	$U_{95\%}$	$U_{99\%}$
GUM	2.2500	3.2502	4.2784
MCM	2.2496	3.0582	3.6551

3. CALIBRAÇÃO DE UM MULTÍMETRO DIGITAL

O caso de estudo envolvendo a calibração de um multímetro digital num patamar de calibração de 100 V DC, tem como modelo matemático [2]:

$$E_X = V_{iX} - V_s + \delta V_{iX} - \delta V_s$$

onde E_X representa o erro de indicação e os termos no segundo membro se referem: V_{iX} , à voltagem indicada pelo multímetro digital (MMD); V_s , à voltagem gerada pelo calibrador; δV_{iX} , à correcção da voltagem indicada pelo

MMD; e δV_s à correcção da voltagem do calibrador.

Aplicando o método de Monte Carlo com 500 000 simulações, o erro de indicação do MMD resultou no valor de 0,100 V, com um intervalo de confiança de 95% de [0,050;0,151]. A forma da distribuição é essencialmente trapezoidal, sendo a distribuição rectangular uma aproximação possível (tal como indicado no guia EA 4/02), mas seria uma aproximação grosseira assumir uma distribuição gaussiana (normal) para este tipo de problema.

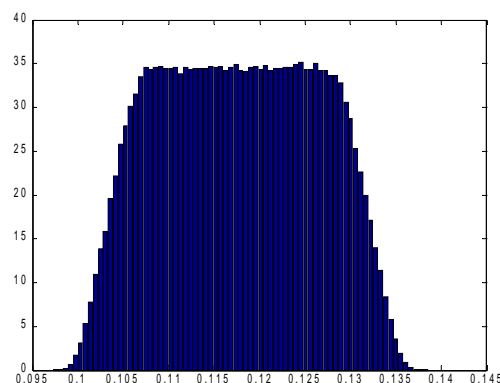


Figura 4: Distribuição da variável de saída no caso da calibração de um multímetro digital.

4. CONCLUSÕES

A utilização do GUM requer uma análise das condições de cada problema e não deve ser encarada como uma receita válida para todas as situações. Haverá até, porventura, situações em que o GUM dará uma resposta adequada mesmo não estando garantidas todas as condições para a sua aplicabilidade, porém só com uma ferramenta de validação apropriada se pode concluir dessa adequabilidade.

O método de Monte Carlo é uma das ferramentas que pode ser utilizada com vantagem nessas situações.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 1995. ISBN 92-67-10188-9, Corrected and reprinted.
- [2] Cox, M. G. and Harris, P. M. – *SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation*. Tech. Rep., National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2004.
- [3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Supplement 1, Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Final Draft, 2006.